ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE
DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL
DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG/ ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

Première composition de mathématiques
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Avertissement !

- **Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1 à 4.**
- **L'exercice 1 est composé de 10 questions indépendantes entre elles, toutes notées sur 1 point. Une note strictement inférieure à 6 est éliminatoire. Toutefois, cet exercice ne comptera que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve.**

NOTATIONS.

— On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels*.

— On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des *nombres réels*.

— On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes* — il contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ainsi qu'un élément i qui vérifie : $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x$.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.
3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.
4. Déterminer les limites à gauche et à droite en 2 de la fonction de la question précédente.
5. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)\ln(\cos(x))$ définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
6. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $a = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
7. Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : deux boules avec le numéro 1, une boule avec le numéro 5 et une boule avec le numéro 8. On pioche au hasard *sans remise* une première boule, puis une deuxième. On note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus. Calculer l'espérance de X.
8. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$. Étudier la monotonie de la suite, puis déterminer sa limite.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{3\ln(n)^4 - n^3 + e^{-n}}{1+\cos(n)+2n^3}$. Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

10. Résoudre l'équation : $\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, puis d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

1. **Question préliminaire.** Montrer que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Dans cet exercice, on note I l'intervalle $[-1,+\infty[$, et on appelle f la fonction définie par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x e^x.$$

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

On note g la réciproque de la fonction f, c'est-à-dire la fonction définie par la relation :

$$\forall x \in I, \quad \forall y \in J, \quad y = f(x) \iff x = g(y).$$

4. Donner sans démonstration le tableau de variations complet de la fonction g, et préciser $g(0)$.
5. Montrer que pour tout $x \in J$: $g(x)e^{g(x)} = x$.

Pour tout réel $a > 0$, on note h_a la fonction $x \mapsto e^{-x} + ax^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $a > 0$.
   (a) Montrer que la fonction h_a admet un minimum.
   On note m_a le point en lequel ce minimum est atteint.
   (b) Exprimer m_a en fonction de a et à l'aide de la fonction g.
   (c) Montrer que : $h_a(m_a) = \dfrac{e^{-m_a}}{2}(m_a+2)$.
7. Montrer que la fonction $a \mapsto m_a$ définie sur $]0,+\infty[$ est décroissante, puis calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition.
8. (a) Montrer que la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ est croissante.
   (b) Déterminer la limite de la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On note φ la fonction $x \mapsto 3\sin(x)^5 - 5\sin(x)^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Le but de cette question est de trouver un intervalle d'étude *intelligent* de φ permettant de tracer entièrement la courbe $\mathscr{C}$.
   (a) Expliquer pourquoi l'étude de φ sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$ permet de tracer entièrement $\mathscr{C}$.
   (b) Montrer que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
   (c) Montrer que la droite d'équation : $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
   (d) Expliquer finalement pourquoi l'étude de φ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ permet de tracer entièrement la courbe $\mathscr{C}$.

2. On note ψ la fonction $x \mapsto 3x^5 - 5x^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Calculer $\psi(0)$, $\psi(1)$ et $\psi(-1)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction ψ.
   (c) En déduire les variations de φ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 4

On note B la fonction définie pour tous $a, b \in [0, +\infty[$ par : $B(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b \mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction B est bien définie.
2. Le but de cette question est de calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
   (a) En effectuant le changement de variable $t = \cos(\theta)^2$, montrer que :
   $$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \mathrm{d}\theta.$$
   (b) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 = \dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}$.
   (c) En déduire la valeur de $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3. Soient $a, b \in [0, +\infty[$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $B(a+1, b) = \dfrac{a+1}{b+1} B(a, b+1)$.
   (b) Vérifier que : $B(a+1, b) + B(a, b+1) = B(a, b)$.
   (c) En déduire une expression de $B(a+1, b)$ en fonction de $B(a, b)$.
   (d) Au moyen d'un changement de variable, montrer que : $B(a, b) = B(b, a)$.
   (e) En déduire la valeur de $B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Exercice 5

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - u_n^3$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0, 1[$.
   (b) Montrer que la suite converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

2. Exprimer v_n en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
3. On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$ définie sur l'intervalle $]0, 1[$.
   (a) Montrer que f est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad x_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k = \dfrac{v_0+\cdots+v_n}{n+1}$.

4. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_0 \geq x_n \geq v_n$.
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge, puis que sa limite L vérifie : $\quad L \geq 2$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 2x_{2n+1} - x_n \leq v_{n+1}$. $\quad$ En déduire que $L = 2$.
   (d) Exprimer simplement x_{n-1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (e) En déduire la limite de $(nu_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6

1. **Question de cours.** Dans cette question, on fixe deux nombres réels a et b.
   (a) Montrer que : $\quad \big(\cos(a)+\mathrm{i}\sin(a)\big)\times\big(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)\big) = \cos(a+b)+\mathrm{i}\sin(a+b)$.
   (b) Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\cos(a)+\mathrm{i}\sin(a)\big)^n = \cos(na)+\mathrm{i}\sin(na)$.

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation : $\quad z^6+(7-\mathrm{i})z^3-8-8\mathrm{i}=0 \quad$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que : $\quad (a+\mathrm{i}b)^2 = 80+18\mathrm{i}$.
   (b) En déduire les racines de l'équation : $\quad x^2+(7-\mathrm{i})x-8-8\mathrm{i}=0 \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.
3. (a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
   (b) En déduire les *racines cubiques* complexes de -8, c'est-à-dire les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels : $\quad z^3 = -8$.
4. (a) Écrire $1+\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
   (b) En déduire les solutions de l'équation : $\quad z^3 = 1+\mathrm{i} \quad$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   Vous écrirez les solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 7

Une entreprise fabrique des casques audio. Dans sa production, 5% des casques ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Afin de détecter les casques défaillants, l'entreprise met en place un contrôle qualité : ce contrôle permet de rejeter 96% des casques défaillants, mais rejette malheureusement également 7% des casques en état de marche.

Dans la suite, on note R l'évènement « le casque est rejeté », et D l'évènement « le casque est défaillant ».

1. On choisit un casque au hasard dans cette production.
   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right)$, c'est-à-dire la probabilité que le casque ne soit pas rejeté au contrôle qualité et qu'il soit défaillant.
   (b) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas rejeté par ce contrôle ?

À la suite du test, les casques qui sont détectés défaillants sont détruits, et ne sortent donc pas de l'usine. L'entreprise fabrique 10000 casques chaque jour.

2. Combien de casques sortent effectivement chaque jour de l'entreprise en moyenne ?

La production d'un casque coûte 20 euros. Chaque casque sortant de l'usine est vendu 80 euros, et on suppose que tous les casques sont vendus. Cependant, l'entreprise, qui tient à sa réputation, promet de payer 160 euros aux malheureux clients qui auraient acheté un casque défectueux.

3. Combien rapporte en moyenne un casque à l'entreprise ?